ばねの質量を考慮した単振動運動 （2012 滋賀医科大学）

以下の文中の【 】の中に入る適当な式を記入し，設問に答えよ。
各設問の解答には結果だけでなく，導出過程も記せ。

ばねでつながれた物体が行う単振動では，通常ばねの質量は考慮されない。
以下で，ばねに質量がないとした場合とある場合を比較し，質量を考慮すると単振動の様子がどのように変わるかを考える。

図 1 のように，固定端（原点）から質量 M のおもりがばねでつり下げられている。
おもりは重力とばねの伸びに比例した復元力を受け，鉛直線上を運動する。
重力加速度の大きさを g，ばね定数を k，重力などの外力の影響を受けない状態（自然な状態）でのばねの長さを l_0 とする。k と l_0 はばねの質量に関係せず一定である。
そして，鉛直下方を z 軸の正方向にとる。

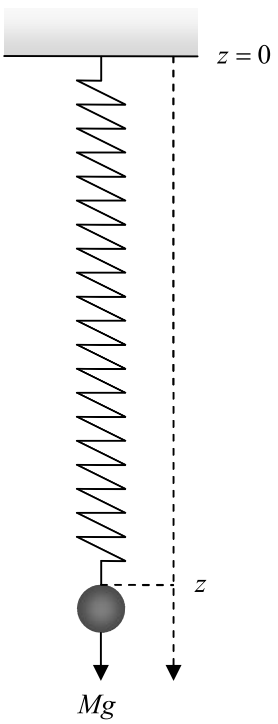


図 1

(a) 最初に，ばねに質量がないとした場合を考える。

おもりの位置座標（位置）をz，加速度をaとすると，おもりの運動方程式は【①】である。おもりが静止しているとき，力のつり合いから，ばねの伸びbはM,k,gを用いて$b=$【②】と表される。重力による位置エネルギーは，基準点を原点にとると$U=$【③】である。また，ばねの弾性エネルギーはばねの伸びにより$V=$【④】で与えられる。

これらの和である全体の位置エネルギー$U+V$が最小となるときのおもりの位置z_bを求めると，それはl_0とbの和$\left(z_b=l_0+b\right)$であり，おもりのつり合いの位置を与えることがわかる。よって，全体の位置エネルギーからつり合いの位置を求め，それとl_0との差としてばねの伸びを得ることもできる。

さて，おもりをz_bからわずかに変位させると，その後，おもりはz_bを中心に単振動をする。z_bから測った位置を$x=z-z_b$とすると，時刻$t=0$にz_bにあったおもりの時刻tでの位置は$x=A\sin\omega t$と表される。ここで，Aは振幅，ωは角振動数である。z_bは定数であるから，微小時間Δtの間の変位をΔxとすると，時刻tでのおもりの速度vは$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$で表される。おもりの運動エネルギー$K$は$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$を用いて表され，また$U+V$も$x$の 2 乗に比例する項と定数項の和で表される。$K$と$U+V$の和がおもりの力学的エネルギー$E$であり，$E$が時刻によらず一定であることから，$\omega$は$M$と$k$を用いて$\omega=$【⑤】と表されることがわかる。

(b) 次に，ばねの質量が m である場合を考える。この場合，U と V に加えて，重力によるばねの位置エネルギーとばねの運動エネルギーを考えなければならない。これらを求めるとき，簡単のため，ばねは各部分で同じ割合で伸びるとする。

重力によるばねの位置エネルギー W はその重心に全質量が集中したと考えたときの質点の位置エネルギーに等しい。おもりの位置が z であるので $W=$【⑥】となる。これに問③の U と問④の V を加えた $U+V+W$ が全体の位置エネルギーである。

問 1 つり合いの状態で $U+V+W$ が最小となることから，おもりが静止しているときのばねの伸び d を求めよ。

おもりをつり合いの位置 $z_d = l_0 + d$ からわずかに変位させると，その後，おもりは z_d を中心に単振動をする。z_d から測った位置 y は $y = z - z_d$ であり，おもりの速度 u は微小時間 Δt の間の変位を Δy とすると $u = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ と表される。ばねの運動エネルギーを求めるために，N を 1 と比べて十分大きな正の整数として，自然な状態での長さ l_0 のばねを仮想的に N 個の小さな部分に等分割してみる。このとき，分割した部分の巾は $c = \dfrac{l_0}{N}$ であり，n 番目の部分は位置 $z_n = (n-1)\cdot c$ で表される。図 2 のように，おもりが z_d から y だけ変位しているとき，ばねは同じ割合で伸びるので，自然な状態で z_n であった点は $z_n' =$【⑦】に移る。y が時間とともに変化するとき，c が十分小さいので各部分内では速度は同じとしてよく，z_n で代表される n 番目の部分の速度は，問⑦の結果から u を用いて表されることがわかる。

問 2 こうして得られる n 番目の部分の運動エネルギー B_n を $n=1$ から N まで加え合わせ，N を非常に大きくすると和は一定値 B に近づく。これがばねの運動エネルギーである。B を求め，m と $u = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ で表せ。ここで，関係式 $1 + 2^2 + \cdots + (N-1)^2 = \dfrac{1}{6}(N-1)N(2N-1)$，および近似式 $(N-1)N(2N-1) \approx 2N^3$ を用いてよい。

問 2 の結果より，ばねとおもりを合わせた全体の運動エネルギー $K+B$ が $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ を用いて表され，また $U+V+W$ も y で表される。そして，$K+B$ と $U+V+W$ の和がばねの質量を考慮したときの全体の力学的エネルギー E' であり，これは時刻によらず一定である。

問 3 **(a)**の場合に問⑤で角振動数を求めたのと同じように考えて，単振動の角振動数を求めよ。

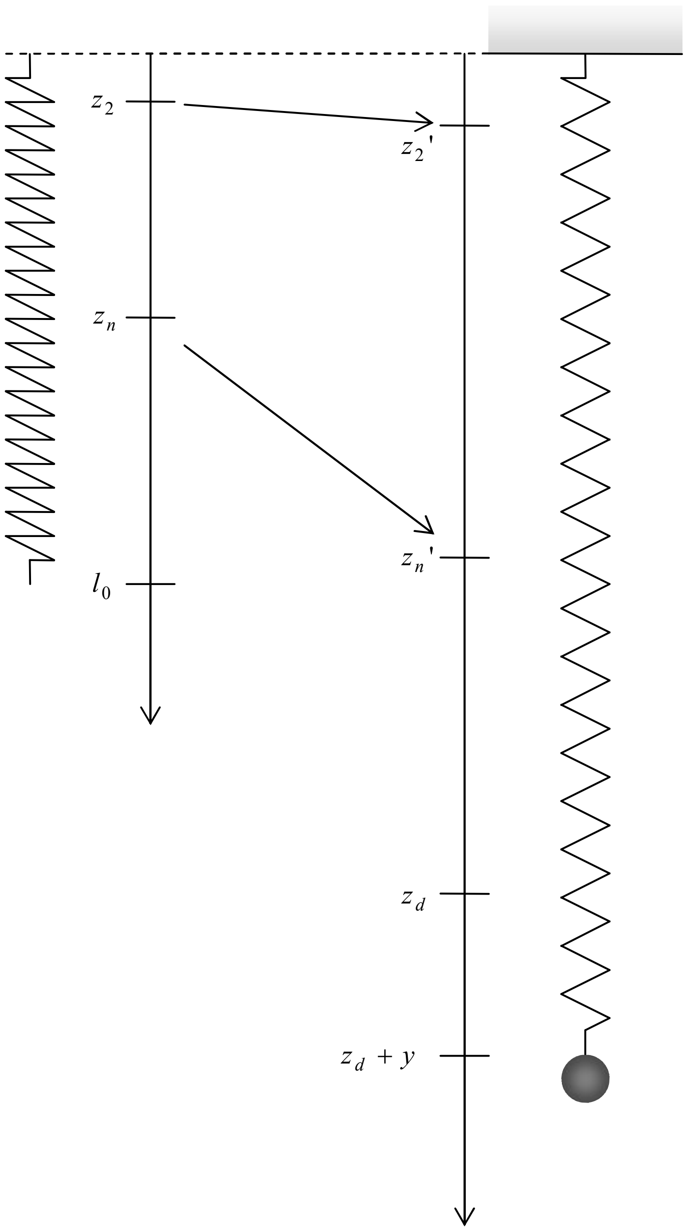


図 2

解答と解説

① $Ma = -k(z - l_0) + Mg$

解説

おもりにはばねの復元力（弾性力）$-k(z - l_0)$ と等しい力と重力 Mg が働く。

② $\dfrac{Mg}{k}$

解説

力の大きさのつり合い $kb = Mg$

③ $-Mgz$

解説

おもりが基準点から z まで変位するときの重力がした仕事は mgz である。

おもりの重力の位置エネルギーは重力がした仕事だけ失われる。

基準点の重力の位置エネルギーは 0 であるから，

$0 - mgz = -mgz$

④ $\dfrac{1}{2}k(z - l_0)^2$

⑤ $\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

解説

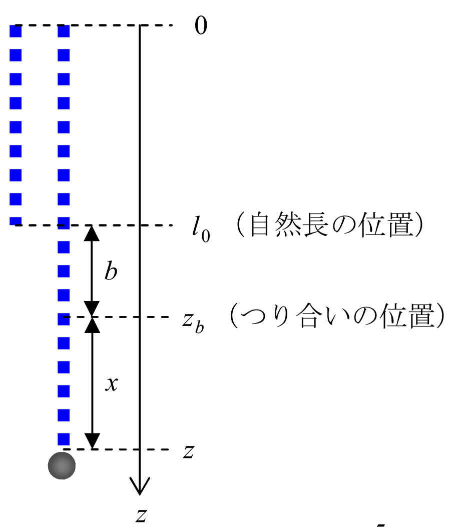
解法 1：公式を使って解く

$F = -KX$ （X はつり合いの位置からの変位）で表される単振動は，

単振動する物体の質量を M とすると，周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K}}$ で与えられる。

これと $\omega T = 2\pi$ より， $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ 問題の場合， $\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ となる。

解法 2：誘導に従って解く



$U+V=-Mgz+\frac{1}{2}k(z-l_0)^2$， $z=x+z_b$， $z_b=l_0+b$ より，

$$
\begin{aligned}
U+V&=-Mg(x+l_0+b)+\frac{1}{2}k(x+b)^2\\
&=-Mgx-Mgl_0-Mgb+\frac{1}{2}kx^2+kbx+\frac{1}{2}kb^2\\
&=\frac{1}{2}kx^2+(kb-Mg)x-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2\\
&=\frac{1}{2}kx^2-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2 \quad (\because kb=Mg)
\end{aligned}
$$

よって，$U+V$ は x^2 に比例する項と定数項の和で表される。

補足

$-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2$ は，つり合いの位置における重力による位置エネルギーと弾性エネルギーの和，すなわちつり合いの位置における位置エネルギーの総和を表す。

したがって，つり合いの位置を基準にすると，おもりがもつ位置エネルギーの総和は，

$\frac{1}{2}kx^2-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2-\left\{-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2\right\}=\frac{1}{2}kx^2$ で表される。

これと $K=\frac{1}{2}Mv^2$， $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$， $x=A\sin\omega t$ より，

$$
\begin{aligned}
E&=K+U+V\\
&=\frac{1}{2}M\left\{\frac{d(A\sin\omega t)}{dt}\right\}^2+\frac{1}{2}k(A\sin\omega t)^2-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2\\
&=\frac{MA^2\omega^2}{2}\cos^2\omega t+\frac{kA^2}{2}\sin^2\omega t-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2
\end{aligned}
$$

E が任意の t で一定だから， $\omega t=0$ と $\omega t=\frac{\pi}{2}$ について，

$\frac{MA^2\omega^2}{2}-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2=\frac{kA^2}{2}-Mg(l_0+b)+\frac{1}{2}kb^2$ が成り立つ。

よって，少なくとも $\frac{MA^2\omega^2}{2}=\frac{kA^2}{2}$， すなわち $\omega^2=\frac{k}{M}$ が成り立つ。

これと $\omega>0$ より， $\omega=\sqrt{\frac{k}{M}}$

⑥ $-\dfrac{mgz}{2}$

解説

ばねの長さが z であることと与えられた条件（ばねは各部分で同じ割合で伸びる）より，

ばねの重心の位置は $-\dfrac{z}{2}$

⑦ $(n-1)c\cdot\dfrac{z_d+y}{N}$ あるいは $(n-1)\cdot\dfrac{z_d+y}{N}$

解説

$\dfrac{z_n'}{z_n}=\dfrac{z_d+y}{l_0}$ より， $z_n'=z_n\cdot\dfrac{z_d+y}{l_0}$

これに $z_n=(n-1)c$ あるいは $z_n=(n-1)\cdot\dfrac{l_0}{N}$ を代入すればよい。

問 1

$$U+V+W=-Mgz+\frac{1}{2}k(z-l_0)^2-\frac{mgz}{2}$$
$$=\frac{1}{2}kz^2-\left(kl_0+Mg+\frac{mg}{2}\right)z+\frac{1}{2}kl_0{}^2$$
$$=\frac{1}{2}k\left(z-\frac{2kl_0+2Mg+mg}{2k}\right)^2-\frac{(2kl_0+2Mg+mg)^2-4k^2l_0{}^2}{8k}$$

より，$z=\dfrac{2kl_0+2Mg+mg}{2k}$ のとき，全体の位置エネルギーが最小となる。

よって，これがおもりが静止しているときの位置であり，

このときのばねの伸び $d=\dfrac{2kl_0+2Mg+mg}{2k}-l_0=\dfrac{(2M+m)g}{2k}$ ・・・(答)

問 2

ばねの n 番目の部分の位置について，

おもりがある時刻に z_d にあるときのその位置を z_{n1} とすると，

⑦と同様にして，$\dfrac{z_{n1}}{z_n}=\dfrac{z_d}{l_0}$ より，$z_{n1}=\dfrac{z_d}{l_0}\cdot z_n$

おもりがその時刻から微小時間 Δt の間に Δy だけ変位したときのその位置を z_{n2} とすると，

⑦と同様にして，$\dfrac{z_{n2}}{z_n}=\dfrac{z_d+\Delta y}{l_0}$ より，$z_{n2}=\dfrac{z_d+\Delta y}{l_0}\cdot z_n$

よって，n 番目の部分の速度を u_n とすると，

$$u_n=\frac{z_{n2}-z_{n1}}{\Delta t}$$
$$=\frac{\dfrac{z_d+\Delta y}{l_0}\cdot z_n-\dfrac{z_d}{l_0}\cdot z_n}{\Delta t}$$
$$=\frac{z_n}{l_0}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta t}$$
$$=\frac{(n-1)\cdot\dfrac{l_0}{N}}{l_0}\cdot u$$
$$=\frac{n-1}{N}u$$

これと分割された各部分の質量が $\dfrac{m}{N}$ であることから，

分割された各部分の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}\frac{m}{N}{u_n}^2=\frac{1}{2}\frac{m}{N}\left(\frac{n-1}{N}u\right)^2$$
$$=\frac{mu^2}{2N^3}(n-1)^2$$

よって，各部分の運動エネルギーの総和は

$$\frac{mu^2}{2N^3}\sum_{n=1}^{N}(n-1)^2=\frac{mu^2}{2N^3}\cdot\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)$$
$$=\frac{mu^2}{12}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{2N-1}{N}$$
$$=\frac{mu^2}{12}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(2-\frac{1}{N}\right)$$

ゆえに，

$$B=\lim_{N\to\infty}\frac{mu^2}{12}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(2-\frac{1}{N}\right)=\frac{mu^2}{6}$$ ・・・(答)

問 3

$U+V+W=-Mgz+\dfrac{1}{2}k(z-l_0)^2-\dfrac{mgz}{2}$， $z=y+z_d$， $z_d=l_0+d$ より，

$$U+V+W=-Mg(y+l_0+d)+\frac{1}{2}k(y+d)^2-\frac{mg}{2}(y+l_0+d)$$
$$=-Mgy-Mgl_0-Mgd+\frac{1}{2}ky^2+kdy+\frac{1}{2}kd^2-\frac{mg}{2}y-\frac{mgl_0}{2}-\frac{mgd}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[ky^2+\{2kd-(2M+m)g\}y-(2M+m)g(l_0+d)+kd^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{ky^2-(2M+m)g(l_0+d)+kd^2\right\}\quad\left(\because d=\frac{(2M+m)g}{2k}\right)$$

これと $K=\dfrac{1}{2}Mu^2+\dfrac{1}{6}mu^2$ より，

$$E=U+V+W+K$$
$$=\frac{1}{2}\left\{ky^2-(2M+m)g(l_0+d)+kd^2\right\}+\frac{1}{2}Mu^2+\frac{1}{6}mu^2$$
$$=\frac{1}{6}\left\{3ky^2-3(2M+m)g(l_0+d)+3kd^2+(3M+m)u^2\right\}$$

ここで，$y = A'\sin\omega' t$ とおくと，$u = \dfrac{dy}{dt} = A'\omega'\cos\omega' t$ より，

$$3ky^2 + 3(2M+m)g(l_0+d) + 3kd^2 + (3M+m)u^2$$
$$= 3kA'^2\sin^2\omega' t + 3(2M+m)g(l_0+d) + 3kd^2 + (3M+m)A'^2\omega'^2\cos^2\omega' t$$

よって，

$$E = \frac{1}{6}\left\{3kA'^2\sin^2\omega' t + (3M+m)A'^2\omega'^2\cos^2\omega' t + 3(2M+m)g(l_0+d) + 3kd^2\right\}$$

E が任意の t で一定だから，$\omega t = 0$ と $\omega t = \dfrac{\pi}{2}$ について，

$$\frac{1}{6}\left\{(3M+m)A'\omega'^2 + 3(2M+m)g(l_0+d) + 3kd^2\right\} = \frac{1}{6}\left\{3kA'^2 + 3(2M+m)g(l_0+d) + 3kd^2\right\}$$

が成り立つ。

よって，少なくとも $(3M+m)A'^2\omega'^2 = 3kA'^2$，すなわち $\omega'^2 = \dfrac{3k}{3M+m}$ が成り立つ。

これと $\omega' > 0$ より，$\omega' = \sqrt{\dfrac{3k}{3M+m}}$ ・・・(答)